



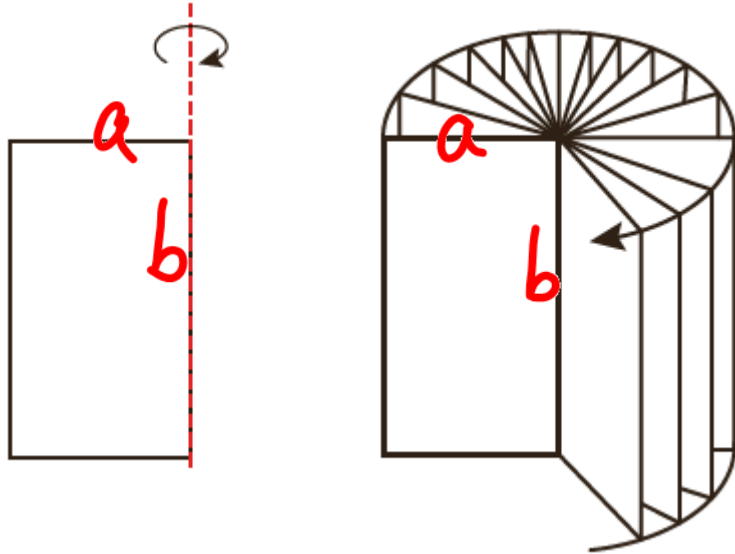
نهج جديد

رياضی دوازدهم

فصل ۶



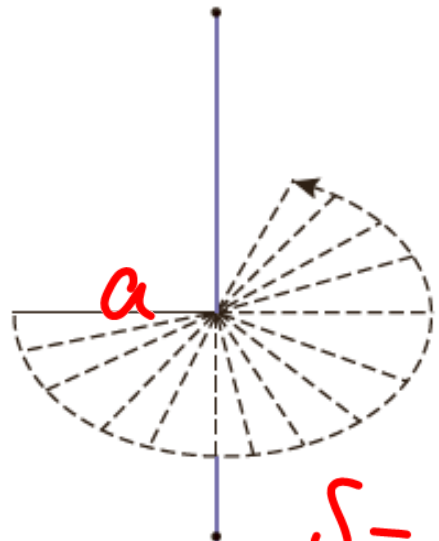
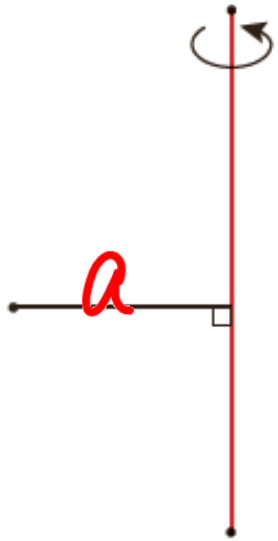
الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول
یا عرض آن: **استوانه**



$$V = \pi a^2 b$$



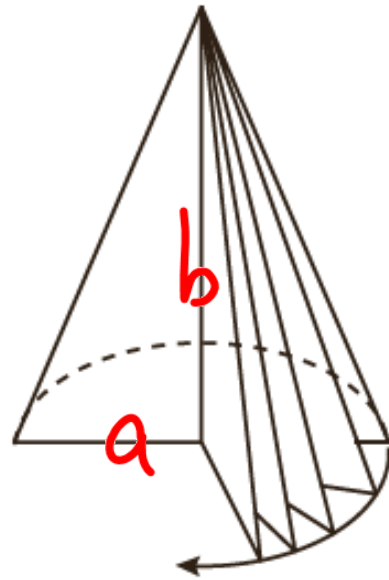
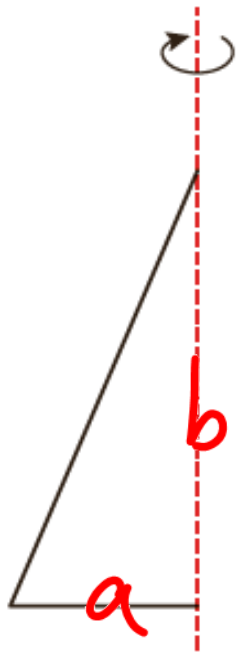
ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط
دیگری که بر آن عمود است: ... دایره ...
 ∞



$$S = \pi a^2$$



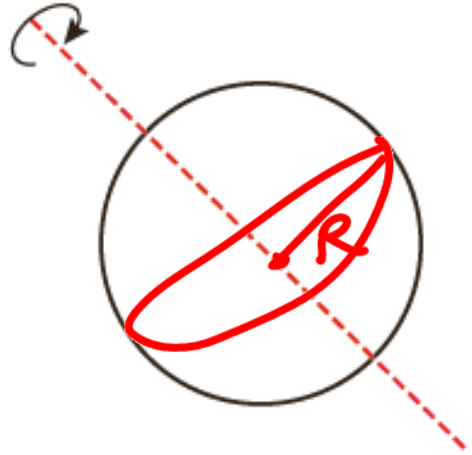
پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه: **مخروط**



$$V = \frac{1}{2} \pi a^2 b$$



المنهج العربي



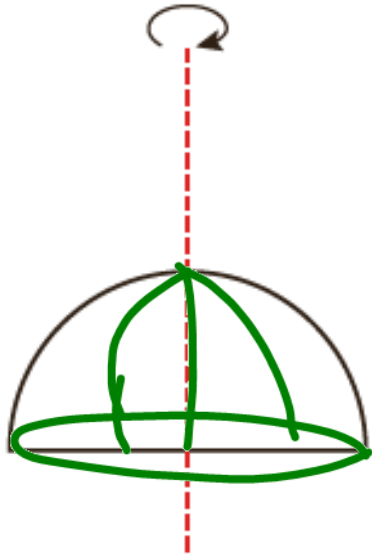
ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از
قطرهای آن: **کره**

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$



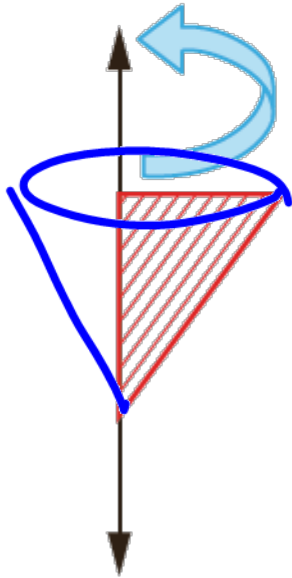
الکتریک
مغناطیس
فیزیک
ریاضیات
شیمی
بیولوژی
تاریخ
جغرافیا
ادبیات
هنر
علوم

ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن: **نمکیره**

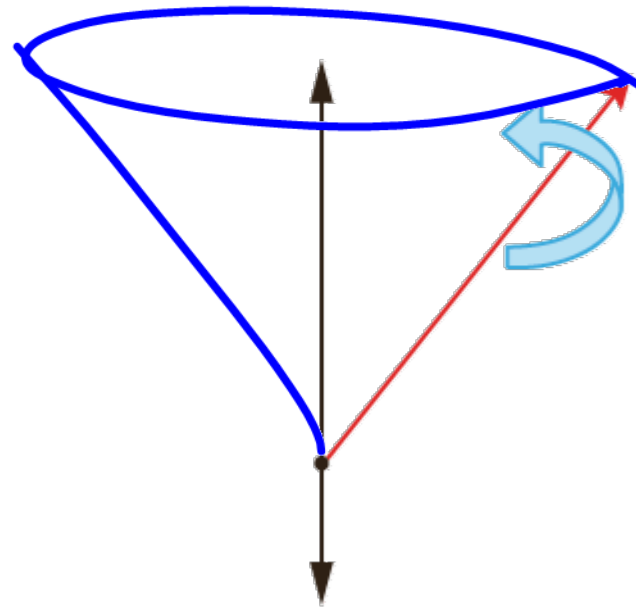


۱ شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت‌های زیر مشخص کنید و آنها را با هم مقایسه کنید :

ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول محور **مخروط**



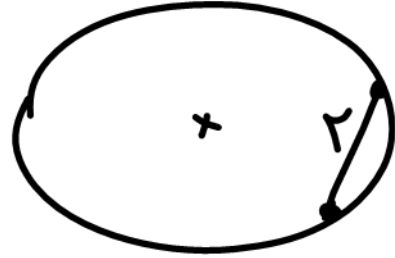
الف) شکل حاصل از دوران **نیم خط** حول محور **روی مخروطی**



الکیمیاء
الطبیعیات
الف

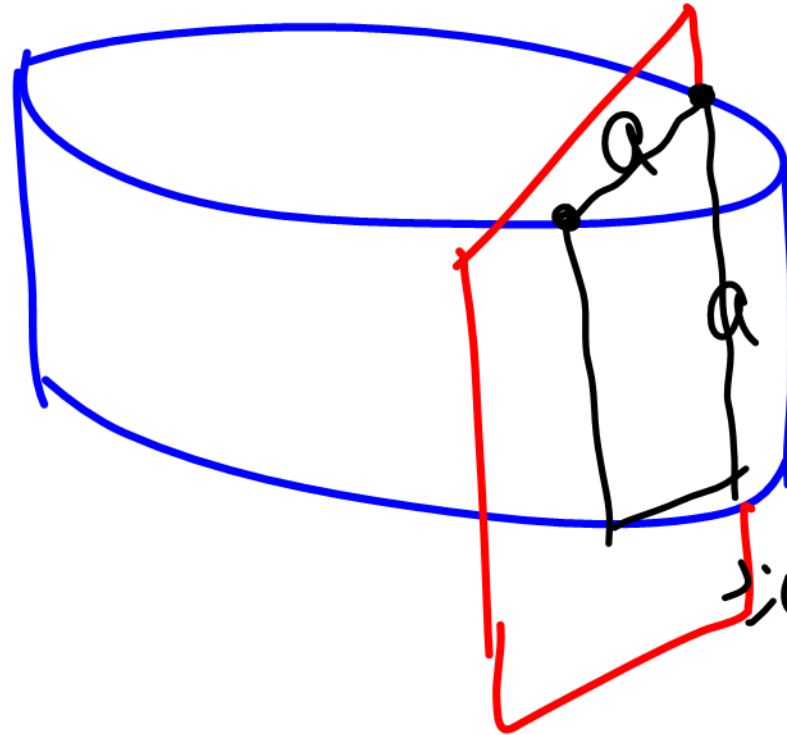


مخازن نفتی در زنگان



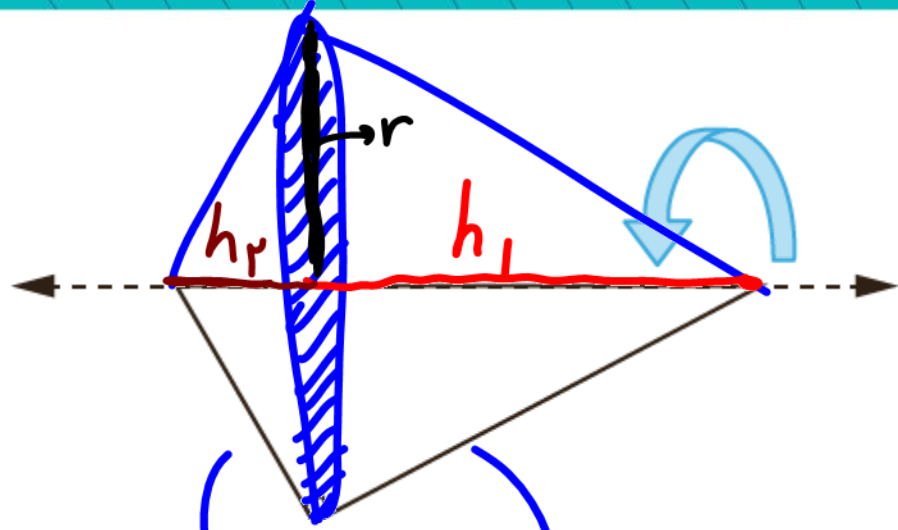
۲ مستطیلی را حول عرض آن دوران داده ایم.

ب) سطح مقطع حاصل از برخورد این استوانه و یک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟



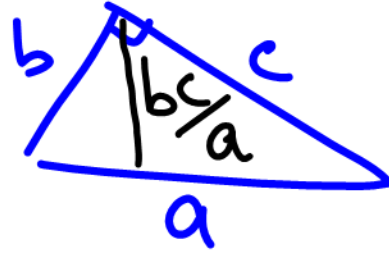
صفحه مولزی
مگر مخروط
است و
روی قاعده
دتری بطول
(عرض) h سازد





۳ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن چیست؟

رو مخروط
توابعه شکر

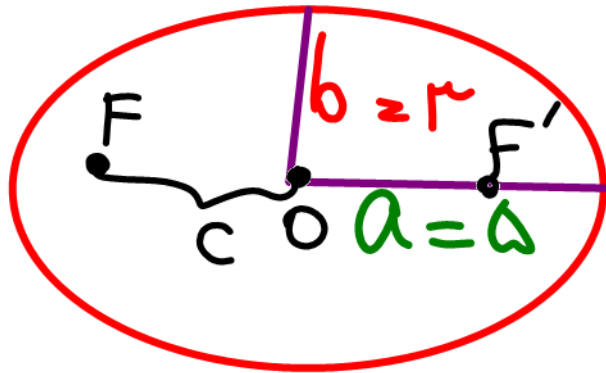


$$r = \frac{bc}{a} \Rightarrow V = \frac{1}{2} r^2 (h_l + h_r) = \frac{1}{2} \frac{b^2 c^2}{a^2} a$$



الکتریسیته
مغناطیس
فیزیک
ریاضیات
شیمی
بیولوژی

۱ اگر در یک بیضی داشته باشیم $a=5$ و $b=3$ ، در این صورت اندازه فاصله کانونی را محاسبه کنید.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow 5^2 = 3^2 + c^2$$

$$\Rightarrow 16 = c^2$$

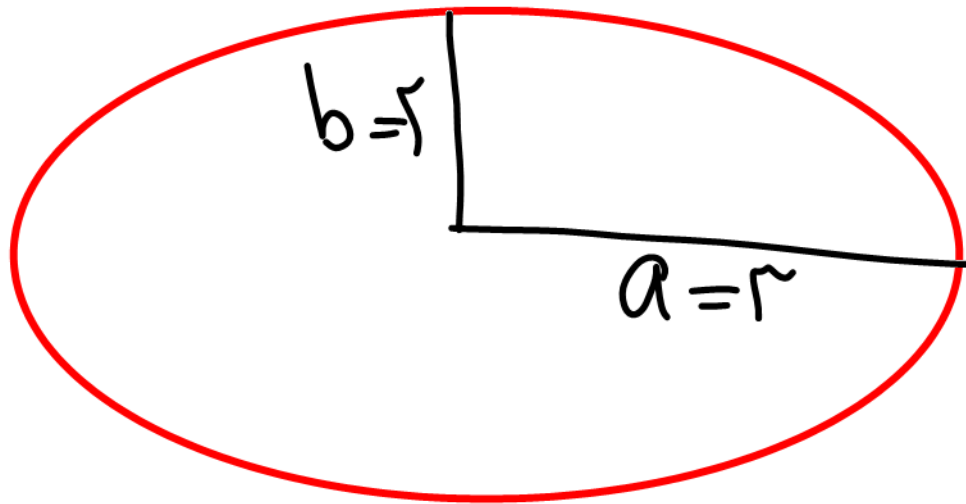
$$\Rightarrow c = 4$$

$$FF' = 2c = 8$$



الکتریک
مغناطیس
مکانیک
فیزیک
ریاضیات
شیمی
زیست‌شناسی
تاریخ
ادبیات
هنر
علوم

۲ در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.
اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴، ۵) باشد:
الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.



$$FF' = 2c = 2\sqrt{5} \quad \text{الف}$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

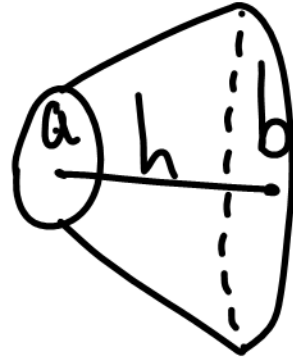
$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$3^2 = 2^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$



مخروط ناقص

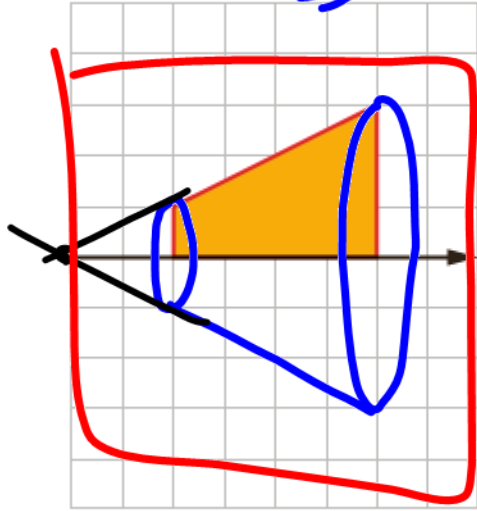


$$\pi (a^2 + b^2 + ab)h$$

۱ در شکل روبه‌رو می‌خواهیم دوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



زوزنقه $S = \frac{(2+6) \times 4}{2}$
 $= 16$



$$\frac{x}{x+6} = \frac{1}{2}$$

$$x = 1$$

$$V = V_1 - V_2$$

$$= \frac{1}{2} \pi (3)^2 \times 6 - \frac{1}{2} \pi (1)^2 \times 2$$

$$= \frac{47\pi}{2}$$



مجموعه‌های مختلف از کتاب‌های مختلف

۲ مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبرو در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

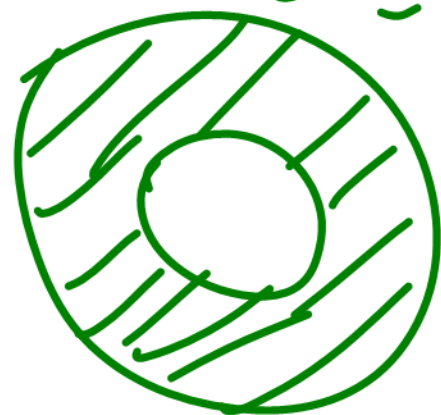
الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

$$V = V_1 - V_2 = \pi \cdot 5^2 \cdot 3 - \pi (2^2 \cdot 3) = 72\pi$$

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعده آن توصیف کنید.

دایره‌ای با یک سوراخ

سطح مقطع:



$$S = \pi (5^2 - 2^2) = 21\pi$$

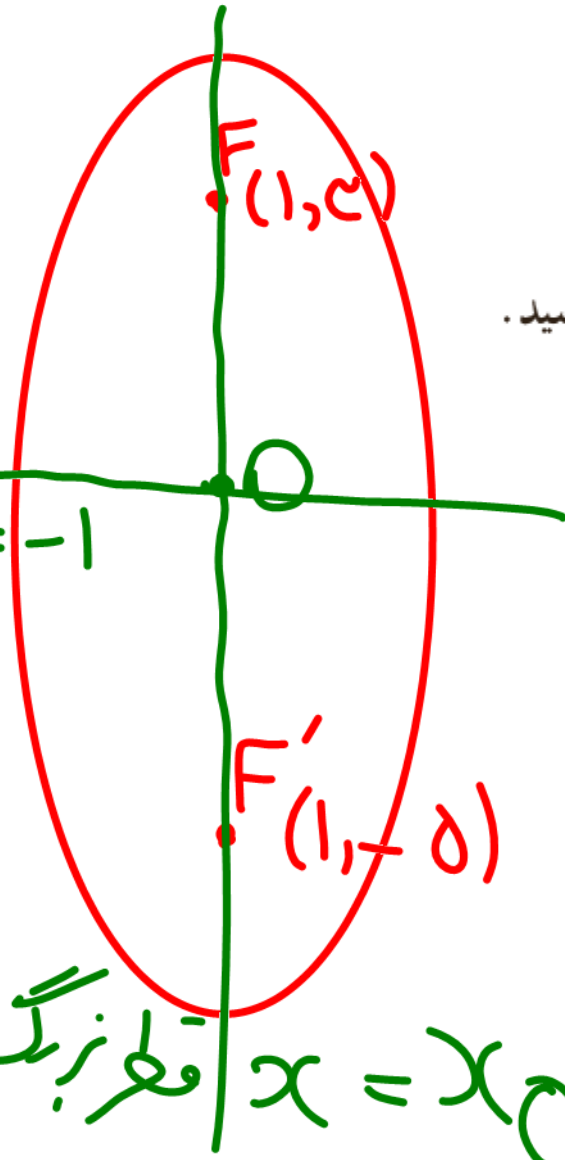


۴ کانون‌های یک بیضی نقاط $(1, 3)$ و $(1, -5)$ است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.
ب) اگر $a=6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

قطر کوچک

$y = y_0 = -1$



$$FF' = 2c = 8 \rightarrow c = 4$$

$$O = \frac{F + F'}{2} = (1, -1)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$6^2 = b^2 + 4^2$$

$$20 = b^2$$

$$b = 2\sqrt{5}$$

$$BB' = 2b = 4\sqrt{5}$$



مجموعه‌های گوناگون از اشکال هندسی و فرمول‌ها در حاشیه راست تصویر قرار دارد.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3}$$

۵ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

$$BB' = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 5, a = 5$$

$$B \begin{matrix} +5 \\ -5+3 \end{matrix}$$

$$FF' = 2c = 10$$

$$AA' = 2a = 10$$

$$A' \begin{matrix} -5-5 \\ -1 \end{matrix} \quad F' \begin{matrix} -5-3 \\ -1 \end{matrix} \quad O \begin{matrix} -4 \\ -1 \end{matrix} \quad F \begin{matrix} -4+5 \\ -1 \end{matrix} \quad A \begin{matrix} -4+5 \\ -1 \end{matrix}$$

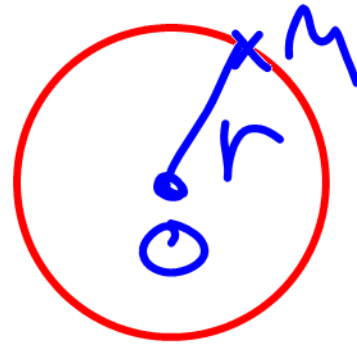
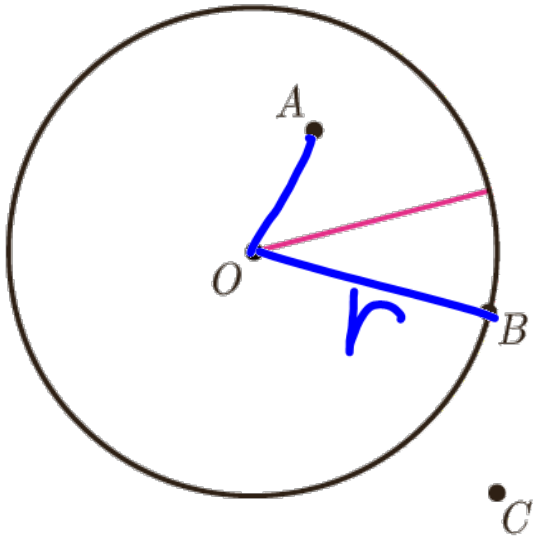
$$B' \begin{matrix} -5 \\ -4-3 \end{matrix}$$



فصل ۱
فصل ۲
فصل ۳
فصل ۴
فصل ۵
فصل ۶
فصل ۷
فصل ۸
فصل ۹
فصل ۱۰
فصل ۱۱
فصل ۱۲
فصل ۱۳
فصل ۱۴
فصل ۱۵
فصل ۱۶
فصل ۱۷
فصل ۱۸
فصل ۱۹
فصل ۲۰
فصل ۲۱
فصل ۲۲
فصل ۲۳
فصل ۲۴
فصل ۲۵
فصل ۲۶
فصل ۲۷
فصل ۲۸
فصل ۲۹
فصل ۳۰
فصل ۳۱
فصل ۳۲
فصل ۳۳
فصل ۳۴
فصل ۳۵
فصل ۳۶
فصل ۳۷
فصل ۳۸
فصل ۳۹
فصل ۴۰
فصل ۴۱
فصل ۴۲
فصل ۴۳
فصل ۴۴
فصل ۴۵
فصل ۴۶
فصل ۴۷
فصل ۴۸
فصل ۴۹
فصل ۵۰

می توان دید که :

ب) اگر نقطه‌ای مثل A درون دایره باشد، فاصله آن تا مرکز دایره ... کم تر از شعاع دایره است، یعنی $OA < r$



المنهج العربي

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

۲ با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید :

معادله دایره	شعاع و مختصات مرکز دایره	نقاط		
		A (1, 1)	B (0, 3)	C (-2, 4)
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$	O (-2, 3), r = 2	OA = $\sqrt{10} > 2$ بیرون	OB = 2 = r روی دایره	OC = 1 < r توی دایره
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$	دایره به مرکز (1, -2) و شعاع 3	OA = 2 = r روی دایره	بیرون دایره OB = $\sqrt{26} > 3$	OC > r $\sqrt{25} > 3$ بیرون دایره



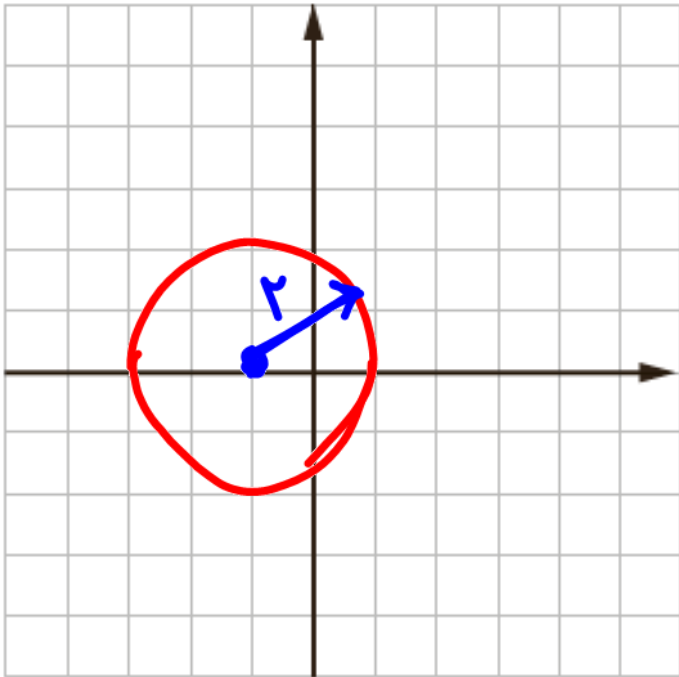
الکترونیک
 هندسه
 فیزیک
 شیمی
 ریاضیات
 تاریخ
 ادبیات
 علوم

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

۳ اگر معادله دایره‌ای به شکل $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ باشد :
الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.

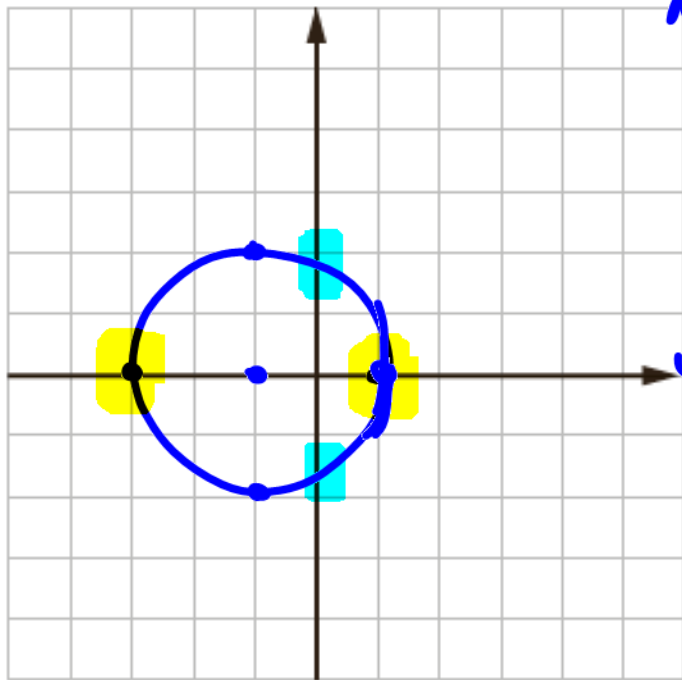
$$\begin{aligned} \alpha &= -1 \\ \beta &= 0 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

$$r = 2 \quad \bigcirc (-1, 0)$$



۳ اگر معادله دایره‌ای به شکل $(x+1)^2 + y^2 = 4$ باشد:

ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.



تقاطع با محور x $\rightarrow y=0$ $(x+1)^2 + 0^2 = 4 \rightarrow x+1 = \pm 2$

نقاط تقاطع $\rightarrow x = -3, 1$

تقاطع با محور y $\rightarrow x=0$ $(0+1)^2 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3$

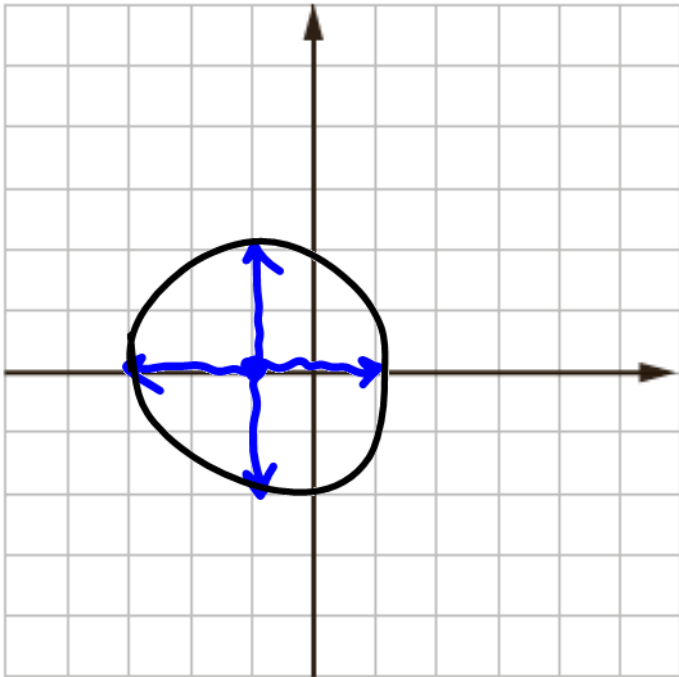
$\Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow (0, \pm\sqrt{3})$

نقاط تقاطع



۳ اگر معادله دایره‌ای به شکل $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ باشد :

پ) شکل این دایره را رسم کنید و صحت پاسخ‌های خود را به کمک شکل بررسی کنید.



$$\text{○} (-1, 0)$$
$$r = 2$$



معادله گسترده دایره‌ای به شکل $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید و معادله دایره را به شکل

راه حل فرمول $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$$

$a = -2$
 $\rightarrow O(1, 3)$
 $b = -6$
 $c = 6$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 6^2 - 4(6)}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4} = 2$$

استاندارد بنویسید. راه اول (اتحاد)

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y = -6$$

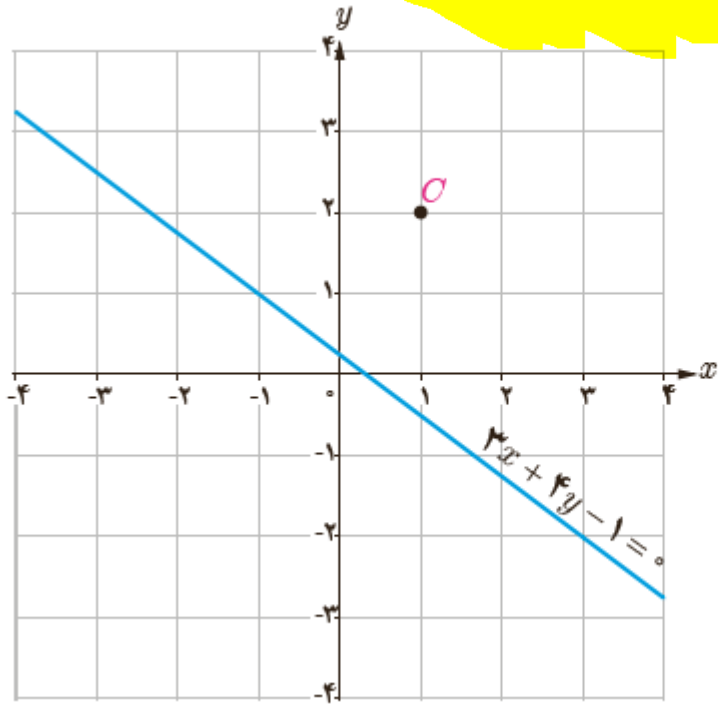
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$$

$$O(1, 3) \quad r = 2$$



مختصات مرکز دایره

نصفه مرکز
از پس = شعاع



۲ معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1, 2)$ باشد.

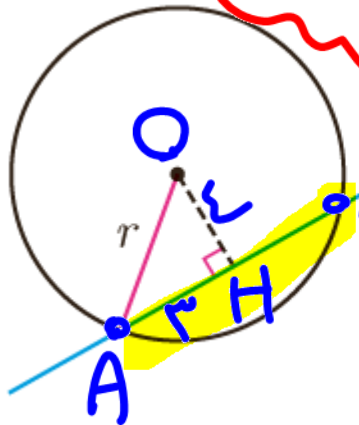
$$r = \frac{\text{نصفه مرکز از پس}}{\text{از پس}} = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5} = 2$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

$$\xrightarrow{C(1, 2)} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$





۳ مرکز دایره‌ای، نقطه $O(2, -3)$ است. این دایره روی خط $3x - 4y + 2 = 0$ وترى به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.

\widehat{AB} و $H \Rightarrow HA = HB = 3$

$OH = 0$ از شرط مساغورس $\rightarrow r = 5$

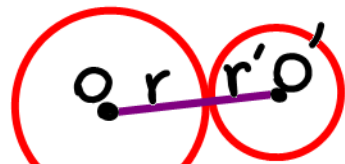
$$OH = 0 = \frac{|3x^2 + 2x + 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = 12$$

$$O(2, -3) \rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

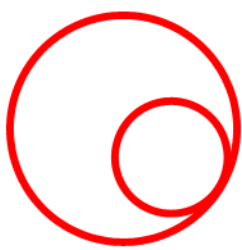


محل مرکز دایره



$$OO' = r + r'$$

۱ با انجام مراحل زیر، معادله دایره‌ای را بنویسید که بر دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ مماس بیرون و مرکز آن نقطه $O(2, -2)$ باشد:



– مختصات نقطه O' ، مرکز دایره داده شده عبارت است از: $O'(-1, 2) \leftarrow O(-\frac{2}{1}, -\frac{2}{1})$

– اندازه r' یعنی شعاع دایره داده شده برابر است با: $r' = \frac{1}{1} \sqrt{2^2 + 16 + 16} = 4$

– طول OO' برابر است با: $OO' = \sqrt{9 + 16} = 5$

– شرط اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند این است که: $OO' = r + r'$ پس شعاع r باید برابر 1 باشد.

– معادله دایره مطلوب را با معلوم بودن اندازه شعاع و مختصات مرکز آن بنویسید: $(x - 2)^2 + (y - (-2))^2 = 1^2$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$



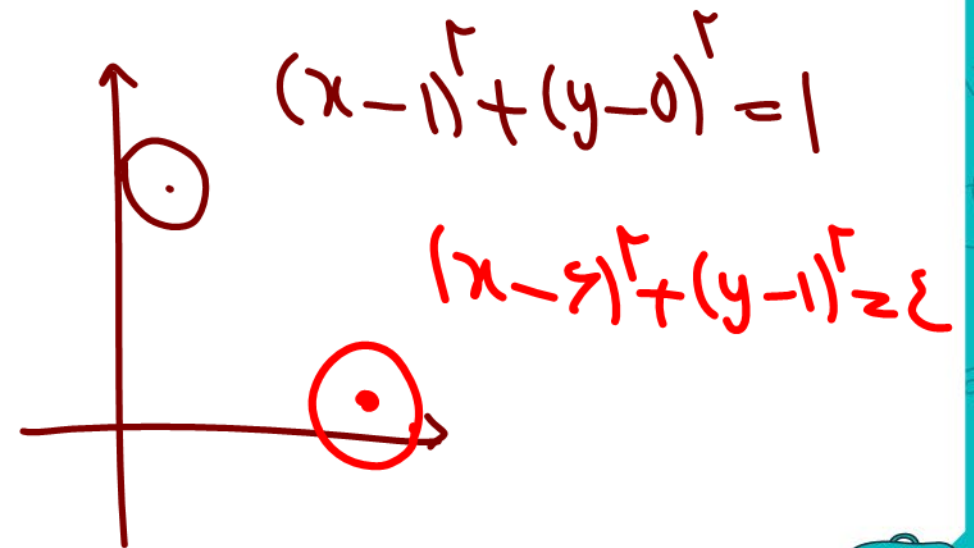
مختصات مرکز دایره مماس بیرون

۲ برای حالت‌های زیر معادله دو دایره را بنویسید و پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y-2)^2 &= 1 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 4\end{aligned}$$

الف) دو دایره هم‌مرکز باشند.

ب) دو دایره بیرون هم باشند.



○ ○ $oo' > r+r'$ متقاطع

○ ○ $oo' = r+r'$ یک بیرون

○ ○ $oo' < r+r'$ مسطح

○ ○ $oo' = |r-r'|$ یک درون

○ ○ $oo' < |r-r'|$ متداخل

۳ برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید:

الف) $x^2+y^2+2x-4y=0$ و $x^2+y^2-2x+4y=0$ $oo' = 2\sqrt{5}$

$O(-1, 2), r = \sqrt{5}$ $O'(1, -2), r' = \sqrt{5}$

ب) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ و $(x+1)^2+(y-2)^2=1$

$O(1, -2)$ $O'(-1, 2)$

$oo' = r+r'$ یک بیرون
 $r = \frac{1}{2}\sqrt{4+16-4} = 2$ $r' = 1$

$oo' = 2\sqrt{5} = r+r'$ متقاطع

$oo' > r+r'$



$$\text{الف) } (x-2)^2 + (y-(-1))^2 = r^2$$

$$\text{از مبدأ} \Rightarrow r = CO = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

$$\text{ب) } (x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$$

$$r = OA = \sqrt{0^2 + 13^2} = 13$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

۲ در حالت‌های زیر معادله دایره را بنویسید:

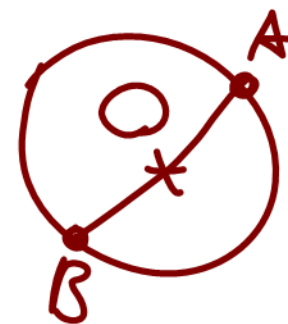
الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(2, -1)$ باشد.

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(2, 3)$ و نقطه $(-3, -9)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پ) دایره‌ای که نقاط $(0, 3)$ و $(-4, -1)$ دو سریکی از قطرهای آن باشند.

$$\text{ح) } O = \frac{A+B}{2} = (-2, 1)$$

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{16+16}}{2} = \sqrt{2}$$



$$(x-(-2))^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 2$$



مجموعه سوالات امتحان نهایی ریاضی پایه دهم

۲ در حالت‌های زیر معادله دایره را بنویسید :

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(۲, -۱)$ باشد.

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(۲, ۳)$ و نقطه $(-۳, -۹)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پ) دایره‌ای که نقاط $(۰, ۳)$ و $(-۴, -۱)$ دو سریکی از قطرهای آن باشند.



الکلیات
الهندسه
الکیمیاء
الفيزياء
الرياضيات
العلوم
الاجتماعيات
اللغات
التربية
الاسلاميات

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4} = 2$$

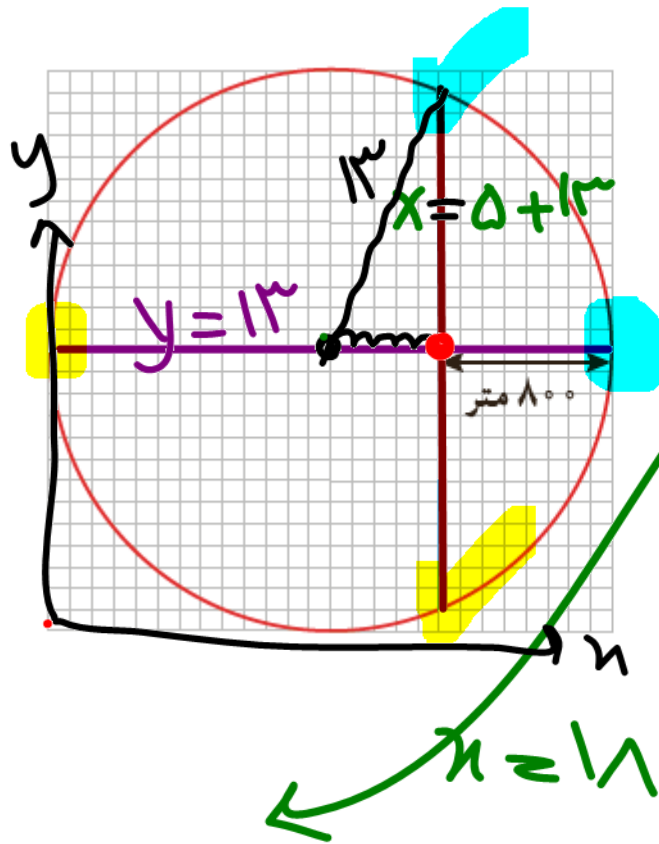
۳ وضعیت نقاط $(0,0)$ و $(-1,-2)$ ، $(0,-1)$ ، $(1,0)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مشخص کنید.

$$O = \left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (1, -2)$$

$OA = \sqrt{5} > r$ بیرون	$OB = r = 2$ روی دایره	$OC = \sqrt{2} < r$ توی دایره	$OD = r = 2$ روی دایره
------------------------------	---------------------------	----------------------------------	---------------------------



مجموعه سوالات و پاسخ‌ها



۴ شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع 13° متر، دو مسیر پیاده‌روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(13, 13)$ و هر واحد برابر 1° متر باشد:

الف) معادله این دایره چیست؟

$$(x-10)^2 + (y-13)^2 = 13^2$$

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع اند؟ $(18, 13)$

ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟ $25 - 13 = 12$

$$y=13 \rightarrow (x-10)^2 = 13^2$$

$$x-10 = \pm 13$$

$$x = 23$$

- ب) $(18, 13)$ $(5, 13)$
 $(18, 25)$ $(26, 13)$

$$28 + (y-13)^2 = 169 \Rightarrow (y-13)^2 = 141 \rightarrow y = 13 \pm \sqrt{141}$$

$$y = 25$$



المنهج العربي

۵ معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کنید و معادله آن را به شکل استاندارد بنویسید.

$$O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (-1, -1)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 2^2 - 2(-8)} = \frac{1}{2} \sqrt{20} = \frac{1}{2} (2\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{5}$$

پسندید:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$$



المنهج العربي

۶ وضع خط‌های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

الف) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ و $6x + 4y = 0$

ب) $x^2 + y^2 = 2$ و $y = -x - 2$

الف) $O(2, 2)$

$r = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 16 - 2(7)} = 1$

مقدور خط: $OH = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \frac{2}{\sqrt{52}} > 1$

پس $OH > r$ بیرون دایره

ب) $x^2 + y^2 = 2$
 $O(0, 0)$ $r = \sqrt{2}$

مقدور خط از خط $x + y + 2 = 0$
 $= \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$

خط بر لبه دایره $\leftarrow OH = r$
 است.

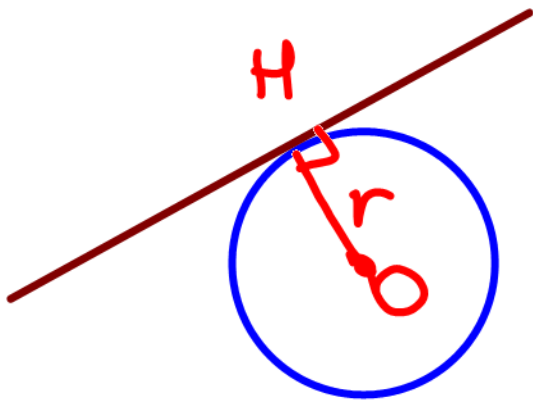


مجموعه سؤالات و پاسخ‌ها
 در کانال تلگرام
 @math_olympics

۸ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطه $(0, 3)$ و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.

$$r = \frac{|3(0) - 4(3) - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = 3$$

نصف قطر
از خط مماس



$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

$$\xrightarrow{(0, 3)} (x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 = 6y$$



المنهج العربي

$$O\left(-\frac{2}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (1, -2)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 4(-4)}$$

$$r = 3$$

$$OO' = \sqrt{20} \approx 4,4$$

$$|r - r'| < OO' < r + r'$$

$$1,4 < 4,4 < 7,7$$

مقاطع اند

۹ مشخص کنید در حالت‌های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -4$ و $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 9$

ب) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 7$ و $x^2 + (y-5)^2 = 5$

$$O(2, -3)$$

$$r = \sqrt{7}$$

$$O'(0, 5)$$

$$r' = \sqrt{5}$$

$$OO' = \sqrt{4 + 64} = \sqrt{68} = 8,24 > r + r'$$

خارجی

$$O(-1, 2)$$

$$r' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 - 2(-9)}$$

$$r' = \sqrt{14} \approx 3,7$$



مجموعه سوالات امتحان نهایی ریاضی ۱

